

**MAI 2 5. cvičení: Integrace racionální funkce a substituce, vedoucí na integraci racionální funkce:**  
(Najděte primitivní funkce na maximálních možných intervalech.)

1. Integrace racionálních funkcí - příklady ze cvičení 4.

2. Integrály, které pomocí vhodných substitucí vedou na integraci racionálních funkcí:

a)  $\int R(e^x) dx$  - substituce  $e^x = t$ :

$$\int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx ; \int \frac{1}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx ; \int \frac{2e^{2x} - 5}{e^{2x} + 4e^x + 5} dx ; \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx ; \int \frac{1}{(e^x + 1)^2} dx ;$$

b)  $\int R(\ln x) \frac{1}{x} dx$  - substituce  $\ln x = t$ :

$$\int \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)(\ln^2 x - 2\ln x + 2)} dx ; (*) \int \frac{\ln x + 1}{x(\ln^3 x + 8)} dx ;$$

c)  $\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $ad - bc \neq 0$  - substituce  $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$  :

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx ; \int \frac{\sqrt{x} - 1}{x \cdot (x - 2\sqrt{x} + 2)} dx ; \int \frac{1}{(\sqrt{x} + 2) \cdot (x + 6\sqrt{x} + 10)} dx ; \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx ;$$

$$\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx ; \int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx ; \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx ;$$

d)  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  - vhodné substituce:

$a > 0$ :  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} x \pm t$  nebo  $c > 0$ :  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt$  (Eulerovy substituce)

$a < 0$  a polynom  $ax^2 + bx + c$  má dva různé reálné kořeny  $\alpha_1 < \alpha_2$ : pak lze

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} \text{ a substituuovat } \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}} = t \text{ nebo}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}(\alpha_2 - x) \sqrt{\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - x}} \text{ a substituuovat } \sqrt{\frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - x}} = t$$

(a jiné vhodné substituce):

(i)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$  ;  $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$  (také  $x = \sinh t$  ( $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ )) ;

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx \text{ (zkuste také } t = \frac{1}{x}, t = 1 + x^2, t = \sqrt{1 + x^2} \text{ nebo } x = \sinh t \text{);}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \text{ (také } x = \cosh t \text{ (} \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{)) a platí } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \text{);}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx ; \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx ; \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx \text{ (zkuste také } t = \frac{1}{x} \text{)} ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}} dx ; \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx ; \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} dx ; \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+x+2}} dx ;$$

$$(ii) \int \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx ; \int \frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}} dx ; \int \frac{1}{x+\sqrt{2+x-x^2}} dx ; \int \frac{x}{\sqrt{6+x-x^2}} dx ; \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx .$$

e)  $\int R(\sin x, \cos x) dx :$

(i) substitute  $\sin x = t$  nebo  $\cos x = t :$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx ; \int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx ; \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx ; \int \sin^5 x dx ; \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx ; \int \frac{1}{\sin x} dx ;$$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx ; \int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x} dx ;$$

(ii) substitute  $\operatorname{tg} x = t :$

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx ; \int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx ; \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx ; \int \frac{1}{\cos^4 x} dx ; \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx ;$$

$$\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx ;$$

(iii) substitute  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t :$

$$\int \frac{1}{2+\cos x} dx ; \int \frac{1}{5+4\sin x} dx ; \int \frac{2+\sin x}{2-\sin x} dx ; \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx .$$